Ejercicio 1.1 [3 puntos]

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Tarea 1.1A (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro.

Tarea 1.1B (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para a= -2

1.1.A Discusión del sistema

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En este caso, el máximo rango que tienen ambas matrices es 3, por lo que conviene empezar calculando el determinante de A (matriz cuadrada) y hallando para qué valores de a es distinto de 0, ya que el rg(A) = 3

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2+a^2-1-2a-a = 0 \rightarrow a^2-3a-4=0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Caso I Si a = -1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de la matriz A

Como $|A| = 0 \rightarrow$ rg(A) < 3

Calculamos un determinante de orden menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rg(A)} = 2$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 - 2 + 1 + 6 - 2 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{r}(A^*) = 3$$

Teorema de Rouché-Fröbenius:

rg(A) ≠ rg(A*) → Tendremos un sistema Incompatible (No tiene solución)

Caso II Si a = 4

A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A

Como $|A| = 0$ → rg(A) < 3

Calculamos un determinante de orden menor

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ → rg(A) = 2

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 16 + 1 - 24 - 4 = -12 \neq 0$ → r(A^*) = 3

Teorema de Rouché-Fröbenius:

rg(A) ≠ rg(A*) → Tendremos un sistema Incompatible (No tiene solución)

Caso III Si a ≠ −1 y a≠ 4

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A

Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ → r(A^*) = 3

Teorema de Rouché-Fröbenius:

rg(A) = rg(A*) = nº de incógnitas → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (Una única solución)

1.1.A Resolvemos el sistema para a = -2

Estaríamos en el caso III porque a$\neq -1$ y a$\neq$ 4, por lo tanto estaríamos ante un Sistema Compatible Determinado

Resolvemos el sistema por Cramer

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 4 - 1 + 4 + 2 = 6$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1-2+12-3+4+2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-6-2+2-2+6}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3+2-4+1+12-2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Tendremos un Sistema Compatible Determinado (una única solución) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Ejercicio 1.2 [3 puntos]

Una agencia de marketing desea maximizar el impacto de su nueva campaña, medido en miles de visualizaciones, invirtiendo en dos tipos de publicidad: Instagram Stories y YouTube Pre-roll. Los costes unitarios son de 500 € para Instagram y 1.500 € para YouTube, contando con un presupuesto límite de 15.000 €. Las condiciones de contratación exigen un total de al menos 10 anuncios, de los cuales como mínimo 4 deben ser de YouTube. Además, el número de anuncios de Instagram no puede exceder el doble de los de YouTube. Se estima que el impacto por unidad es de 1,5 miles de visualizaciones en Instagram y 3 miles en YouTube.

Realiza las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos anuncios de cada tipo debe contratar la empresa para maximizar el impacto (número de visualizaciones)?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascendería dicho impacto máximo (en miles de visualizaciones)?

1.2.A Función Objetivo y Restricciones

Las variables de decisión son: x → número de anuncios de Instagram

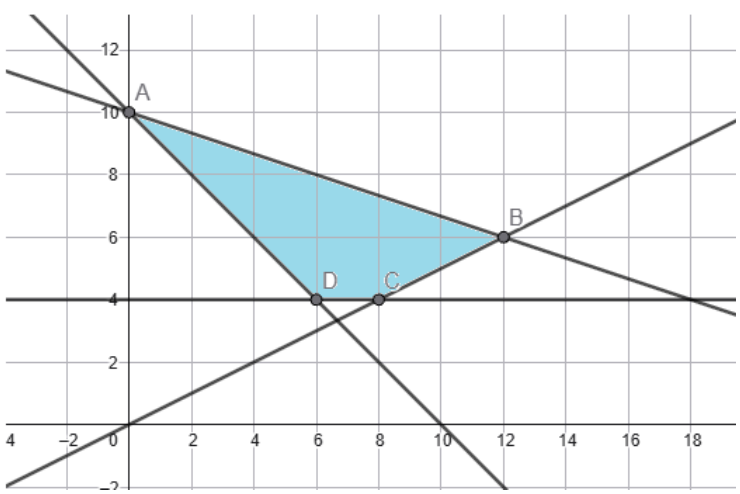
y → numero de anuncios de Youtube.

El objetivo es maximizar los impactos (en miles de visualizaciones): I(x,y) = 1,5x + 3y

Restricciones:

$$\begin{cases} 500x + 1500y \leq 15000 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \\ y \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1.2.B Región Factible



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los impactos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Impactos en cada uno de esos vértices son:

1.2.C y D Número de ejemplares y Beneficios Máximos

A$\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 30 \end{cases}$ → $B(0, 10)$ → I_A= 1,5·0 + 3·10 = 30 miles de visualizaciones (30.000 visualizaciones)

B$\begin{cases} x + 3y = 30 \\ x = 2y \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$ → $B(12,6)$ → I_B= 1,5·12 + 3·6 = 36 miles de visualizaciones (36.000 visualizaciones)

C$\begin{cases} x = 2y \\ y = 4 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$ → C(8,4) → I_C= 1,5·8+3· 4= 24 miles de visualizaciones (24.000 visualizaciones)

D $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 4 \end{cases}$ → A(6,4) → I_D= 1,5·6 + 3·4 = 21 miles de visualizaciones (21.000 visualizaciones)

Para obtener los máximos Impactos se deben publicar 12 anuncios de Instagram y 6 anuncios de Youtube, siendo el impacto (en miles de visualizaciones) de 36, es decir 36.000 visualizaciones.

Ejercicio 2 [4 PUNTOS] **Realice las siguientes tareas a partir de esta función.**

Se considera la función real de variable real definida por :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 - 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 3x - 4 & x > 2 \end{cases}$$

2.1.A (1,5 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que la función f(x) sea continua en todo su dominio. Para el valor de a obtenido, halle los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

2.1.B (1,5 puntos) Considerando el caso a=-2, calcule el área de la región delimitada por esta función, el eje de abscisas OX y las rectas x=0 y x=2.

2.1.C (1 punto) Considerando el caso a=0, calcule los extremos relativos que tiene esta función en el intervalo [-3,2], especificando si son máximos o mínimos.

Se trata de una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas. Como los polinomios son continuos en todo R, la función será continua en todo su dominio salvo, en su caso, en el punto de ruptura, es decir, en x=2.

2.1.A Continuidad y puntos de corte con los ejes para el valor de a

Estudio de la continuidad para x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x^3 + ax^2 - 3x = 8 + 4a - 6 = 4a + 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - 3x - 4 = 4 - 6 - 4 = -6 \\ f(2) = 4a + 2 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=2 se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ → 4a+2 = -6 → a= -2

La función para el valor a = -2 sería: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 3x - 4 & x > 2 \end{cases}$

Puntos de corte de la función definida a trozos:

Puntos de corte con el eje OX (y=0):

Primer tramo x≤ 2

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ Los puntos de corte serán (-1,0) (0,0) y ~~(3,0)~~ Este último valor está fuera de su dominio $(-\infty, 2]$

Segundo Tramo x > 2

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ Los puntos de corte serán ~~(-1,0)~~ y (4,0) El primer valor está fuera de su dominio $(2, \infty)$

Puntos de corte con el eje OY (x=0):

Primer tramo x≤ 2

f(0) = $0^3 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$ el punto de corte será (0,0) . El valor se encuentra dentro de su dominio $(-\infty, 2]$

Segundo Tramo x > 2

f(0) = $0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4$ el punto de corte será ~~(0,-4)~~ . El valor se encuentra fuera de su dominio $(2, \infty)$

Los puntos de Corte con el eje OX: (-1,0) (0,0) y (4,0)

Los puntos de Corte con el eje OY: (0,0)

2.1.B Cálculo del área

Observamos que la función que está definida entre [0,2] es la función f(x) = $x^3 - 2x^2 - 3x$

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Observamos que en el intervalo [0,2] la función solo corta al eje OX en el extremo x=0, y no presenta más puntos de corte en dicho intervalo. Por ello, el área se calcula en un único recinto comprendido entre x=0 y x=2.

$$A = \left|\int_0^2 [(x^3 - 2x^2 - 3x) - 0]dx\right| = \left|\int_0^2 [(x^3 - 2x^2 - 3x)]dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\left[\frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 0^2}{2}\right]\right| = \left|\left[\frac{16}{4} - \frac{16}{3} - \frac{12}{2}\right] - [0]\right| = \left|\left[\frac{-22}{3}\right] - [0]\right| = \frac{22}{3} u^2$$

El área encerrada entre la función y el eje OX, en el intervalo [0,2] será de A= $\frac{22}{3}$ u^2

2.1.C Extremos Relativos en el intervalo [-3,2] para a=0

Observamos que la función que está definida entre [-3,2] es la función f(x) = $x^3 - ax^2 - 3x = x^3 - 3x$

- Derivamos la función: f´(x) = $3x^2$-3
- Igualamos la derivada a cero para calcular los extremos relativos:

f¨(x)= $3x^2$-3 = 0 → $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↗

Crecimiento: $(-3,-1) \cup (1,2)$ Decrecimiento: $(1,2)$

Máximo Relativo: (-1,2) Mínimo Relativo: (1, -2)

Ejercicio 3.1 [3 PUNTOS]

El tiempo que los estudiantes de un instituto tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 estudiantes seleccionados al azar, y se ha calculado que el tiempo medio necesario para completar el examen es de 90 minutos. Realice las siguientes tareas:

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 95% para el valor promedio del tiempo que los estudiantes tardan en completar el examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar el examen, con un nivel de confianza del 97%, fuese de 2 minutos?

3.1.A Cálculo del intervalo de confianza

a) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen, donde $X \sim N(\mu, 10)$.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 100 estudiantes
$\bar{x} = 90$ min
$\sigma = 10$ min

Para una confianza del 95%, Nivel de confianza = 1- α = 0,95 → α = 0,05

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por $IC = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0{,}93}(\mu) = \left(90 - 1{,}96\frac{10}{\sqrt{100}};\ 90 + 1{,}96\frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (88{,}0{,}4; 91{,}96)$$

3.1.B Tamaño mínimo de la muestra

Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

$P(Z \leq Z_{\propto/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}985 \rightarrow$ por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17 \cdot 10}{2}\right)^2 \rightarrow n > 117{,}72$$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **118 estudiantes**

<u>Ejercicio 3.2</u> [3 PUNTOS]

Una empresa de biotecnología ha desarrollado una prueba para una enfermedad. Se estima que el 3% de la población padece la enfermedad. La prueba es altamente sensible, dando positivo en el 98% de las personas enfermas. Sin embargo, en el 5% de las personas sanas, la prueba da un falso positivo. Realice las siguientes tareas que se plantean:

TAREA 3.2.A [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar dé positivo en la prueba.

TAREA 3.2.B [1 PUNTO] Si una persona ha dado positivo, calcule la probabilidad de que realmente este sana

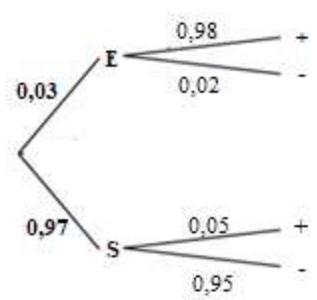
TAREA 3.2.C [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que la prueba dé un resultado incorrecto para una persona elegida al azar.

Se designan por:

E = “Padece una enfermedad“ S = “ Persona Sana “

\+ = “La prueba ha dado positivo” - = “La prueba ha dado negativo”

Diagrama de árbol



Tarea 3.2.A Se trata de una Probabilidad Total:

$P(+) = P(E)\cdot P(+/E) + P(S)\cdot P(+/S) = 0{,}03\cdot 0{,}98+0{,}97\cdot 0{,}05= 0{,}0779$

Tarea 3.2.B Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(S/+) = \frac{P(s\cap +)}{P(+)} = \frac{0{,}97\cdot 0{,}05}{0{,}0779} = 0{,}6226$

Tarea 3.2.C La persona está enferma y ha dado negativo, y la persona está sana y la prueba ha dado positivo

$P(Error) = P(E\cap -) + P(S\cap +) = 0{,}03\cdot 0{,}02 + 0{,}97\cdot 0{,}05 = 0{,}0491$