Ejercicio 1.1 [3 puntos]

Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tarea 1.1A Se pide la matriz X que satisface la ecuación $\mathbf{X^{-1} \cdot A + A = B}$

Tarea 1.1B Se pide la matriz X que satisface la ecuación $\mathbf{A \cdot Y \cdot A^{-1} = I}$

1.1.A Despejamos la X

$$X^{-1} \cdot A + A = B$$

$X^{-1} \cdot A = B - A \rightarrow X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B - A) \cdot A^{-1} \rightarrow X^{-1} \cdot I = (B - A) \cdot A^{-1}$

$X^{-1} = (B - A) \cdot A^{-1} \rightarrow X = ((B - A) \cdot A^{-1})^{-1}$ Teoría : $X = (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$X = (A^{-1})^{-1} \cdot (B - A)^{-1} \rightarrow X = A \cdot (B - A)^{-1}$

$(B\text{-}A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$

Calculamos la inversa de la matriz Z: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot (\mathrm{Adj}(z))^t$

$|Z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz Z tiene matriz inversa

Calculamos la matriz adjunta:

$Z_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $Z_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $Z_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$Z_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $Z_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $Z_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$Z_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $Z_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $Z_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\mathrm{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot (\mathrm{Adj}(z))^t \rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot (B - A)^{-1} \rightarrow \ X = A \cdot Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.B Despejamos la Y

$$A \cdot Y \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot Y \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot I \rightarrow I \cdot Y \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot I \rightarrow Y \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$Y \cdot A^{-1} = A^{-1} \rightarrow \ Y \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A \rightarrow \ Y \cdot I = I$$

$$Y = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2 [3 puntos]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

1.2.A Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

1.2.B Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

1.2.C ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

1.2.D ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

1.2.A Función Objetivo y Restricciones

Las variables de decisión son: x → número de guías prácticas sobre sostenibilidad

y → numero de colecciones de libros de cocina vegetariana

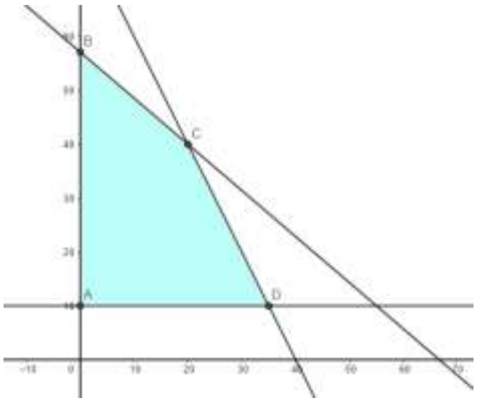
	Cantidad	Papel Reciclado Alta calidad	Papel de Fibras de Bambú
Guías prácticas sobre sostenibilidad	**x**	**60x**	**20x**
Colección de libros de cocina vegetariana	**y**	**70y**	**10y**
	x+y	60x+70y	20x+10y

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 5x + 4y

Restricciones:

$$\begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1.2.B Región Factible



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

1.2.C y D Número de ejemplares y Beneficios Máximos

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow A(0,10) \rightarrow B_A = 5\cdot 0 + 4\cdot 10 = 40€$

B $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 7y = 400 \end{cases} \rightarrow B(0, 400/7) \rightarrow B_B = 5\cdot 0 + 4\cdot 400/7 = 228{,}57€$

C $\begin{cases} 6x + 7y = 400 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \rightarrow C(20,40) \rightarrow B_C = 5\cdot 20 + 4\cdot 40 = 260€$

D $\begin{cases} y = 10 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow D(35,10) \rightarrow B_D = 5\cdot 35 + 4\cdot 10 = 215€$

Para obtener los máximos Beneficios se deben publicar 20 guías prácticas sobre sostenibilidad y 40 libros de cocina vegetariana, siendo el beneficio de 260€.

Ejercicio 2 [4 PUNTOS] **. Dada la función (x) =** $\begin{cases} \mathbf{ax^2-4} & \mathbf{x \leq -1} \\ \mathbf{x^3-x+3} & \mathbf{-1 < x \leq 2} \\ \mathbf{\frac{x+3b-2}{x-1}} & \mathbf{x > 2} \end{cases}$

2.1.A Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

2.1.B Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo (2, +∞)

2.1.C Calcule la integral definida $I= \int_0^2 f(x)dx$.

2.1.A Continuidad

Estudio de la continuidad para x = -1

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to -1^-} ax^2-4 = a-4 \\ \lim_{x\to -1^+} x^3-x+3 = -1+1+3 = 3 \\ f(-1) = a-4 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x=-1 se tiene que cumplir que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ → a-4=3 → a=7

Estudio de la continuidad para x = 2

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{x\to 2^-} x^3-x+3 = 9 \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{\mathbf{x+3b-2}}{\mathbf{x-1}} = \frac{3b}{2-1} = 3b \\ f(2) = 9 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea continua en x = 4 se tiene que cumplir que:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(4)$ → $9 = 3b$ → b= 3

Para que la función sea continua en todo su dominio a=7 y b=3

La función para los valores a = 7 y b = 3 sería : f(x) = $\begin{cases} 7x^2-4 & x \leq -1 \\ x^3-x+3 & -1 < x \leq 2 \\ \frac{x+7}{x-1} & x > 2 \end{cases}$

2.1.B Monotonía en el intervalo (2,∞)

- La función definida en este intervalo es $f(x) = \frac{x+3b-2}{x-1}$

  Para b=3 → $f(x) = \frac{x+7}{x-1}$

Derivando e igualando a 0: $f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+7)}{(x-1)^2} = \frac{-8}{(x-1)^2}$ → f´(x) = 0 → -8≠0 → no hay extremos relativos

	$(2,\infty)$
Signo de f´(x)	-
Comportamiento de f(x)	↘

Crecimiento: No hay
Decrecimiento: $(2,\infty)$
Máximo: no hay
Mínimo: no hay

La función es estrictamente decreciente en (2,∞)

2.1.C Integral definida

Observamos que la función que está definida entre [0,2] es la función $f(x) = x^3 - x + 3$

$$I = \int_0^2 (x^3 - x + 3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} + 3\cdot 2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + 3\cdot 0\right] = \left[\frac{16}{4} - \frac{4}{2} + 6\right] - [0] = [8] - [0] = 8$$

Ejercicio 3.1 [3 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

3.1.A Cálculo del intervalo de confianza

a) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 100 estudiantes
$\bar{x} = 90$ min
$\sigma = 10$ min

Para una confianza del 93%,   Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$\mathrm{IC}_{0,93}(\mu) = \left(90 - 1{,}81\frac{10}{\sqrt{100}};\ 90 + 1{,}81\frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (88{,}19; 91{,}81)$$

3.1.B Tamaño mínimo de la muestra

Para una confianza del 97%,   Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,015}$= 2,17

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17\cdot 10}{2}\right)^2 \rightarrow n > 117{,}72$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **118 estudiantes**

Ejercicio 3.2 [3 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60% de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

TAREA 3.2.A [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

TAREA 3.2.B [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

TAREA 3.2.C [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

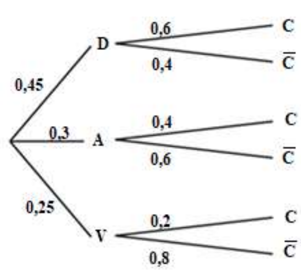
TAREA 3.2.D [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Se designan por:

D = "Practican deporte " A = " Participan en actividades artísticas " V = "Participan en actividades de voluntariado "

C = "Miembros del consejo estudiantil" $\overline{C}$ = "No son miembros del consejo estudiantil"

Diagrama de árbol



Tarea 3.2.A Se trata de una probabilidad Compuesta: P(D∩<C) = P(D)·P(C/D)= 0,45·0,6= 0,27 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 27%

Tarea 3.2.B Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(A\cap\overline{C}) = P(A)\cdot P(\overline{C}/A) = 0,3\cdot 0,6 = 0,18$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 18%

Tarea 3.2.C Se trata de una probabilidad total:

$P(C) = P(D)\cdot P(C/D) + P(A)\cdot P(C/A) + P(V)\cdot P(C/V) = 0,45\cdot 0,6 + 0,3\cdot 0,4 + 0,25\cdot 0,2 = 0,44$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,44 = 0,56$

Tarea 3.2.D Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(V/\overline{C}) = \frac{P(V\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0,25\cdot 0,8}{0,56} = 0,3571$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 35,71%