

Apartado 1 Opción 1 [3 puntos]

En una tienda de electrónica, se venden tres tipos de dispositivos: teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el de una tablet es de 400 € y el de un ordenador portátil es de 800 €. Durante una semana, se vendieron un total de 110 unidades, generando unos ingresos de 42.000 €. Además, se sabe que la suma de los teléfonos móviles vendidos más el doble de los ordenadores portátiles es igual al doble de las tablets vendidas.

Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1.A [1.2 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela este problema para calcular las unidades vendidas de cada tipo.

Tarea 1.1.B [1 PUNTO] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1.C [0.8 PUNTOS] Si se puede, calcule cuántas unidades de cada tipo (teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles) se vendieron esa semana; y si no se puede, justifique por qué.

Definimos las incógnitas: x : unidades vendidas de teléfonos móviles

y : unidades vendidas de tablets

z : unidades vendidas de ordenadores portátiles

Tarea 1.1.A Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 300 \cdot x + 400 \cdot y + 800 \cdot z = 42000 \\ x + 2z = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 110 \\ 3x + 4y + 8z = 420 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Tarea 1.1.B Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 8 & 420 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3×3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3×4 .

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 8 - 4 - 6 + 16 = 16 \neq 0 \rightarrow \text{Como } |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{número de incógnitas} = 3 \rightarrow$ Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

Tarea 1.1.C Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 8 & 420 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 5 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -110 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2 \\ \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 5 & 90 \\ 0 & 0 & 16 & 160 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \\ z = 10 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por la regla de Cramer

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 8 & 420 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 8 - 4 - 6 + 16 = 16$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 110 & 1 & 1 \\ 420 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{960}{16} = 60$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 110 & 1 \\ 3 & 420 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{640}{16} = 40$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 110 \\ 3 & 4 & 420 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{160}{16} = 10$$

El número de unidades vendidas de teléfonos móviles es de 60 unidades

El número de unidades vendidas de tablets es de 40 unidades

El número de unidades vendidas de ordenadores portátiles es de 10 unidades

Apartado 1 Opción 2 [3 puntos]

Una pastelería artesanal elabora dos tipos de tartas: la tarta de Almendra y la tarta de Queso. Para elaborar una tarta de Almendra se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar. Para elaborar una tarta de Queso se necesitan 200 g de harina y 400 g de azúcar. La pastelería dispone diariamente de 24 kg de harina y 20 kg de azúcar. Por motivos de demanda comercial, deben fabricarse al menos 10 tartas de Queso diarias. El beneficio obtenido por cada tarta de Almendra es de 12 € y por cada tarta de Queso es de 15 €. La intención de la pastelería es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2.A [1 PUNTO] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2.B [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2.C [0,75 PUNTOS] ¿Cuántas tartas de cada tipo deben elaborarse diariamente para maximizar el beneficio?

Tarea 1.2.D [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Tarea 1.2.A Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: $x \rightarrow$ número de tartas de almendra

$y \rightarrow$ número de tartas de queso

	Cantidad	Gramos de harina	Gramos de azúcar
Tartas de almendra	x	$500x$	$300x$
Tartas de queso	y	$200y$	$400y$
	$x+y$	$500x + 200y$	$300x + 400y$

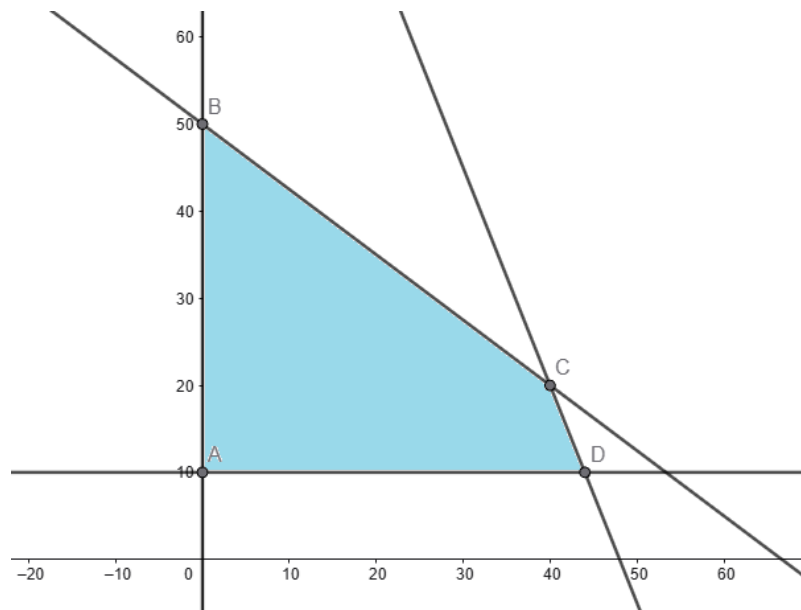
Función Objetivo

El objetivo es maximizar los beneficios $B(x,y) = 12x + 15y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 500x + 200y \leq 24000 \\ 300x + 400y \leq 20000 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Tarea 1.2.B



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow A(0,10) \rightarrow B_A = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 10 = 150\text{€}$$

$$B \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4y = 200 \end{cases} \rightarrow B(0,50) \rightarrow B_B = 12 \cdot 0 + 15 \cdot 50 = 750\text{€}$$

$$C \begin{cases} 5x + 2y = 240 \\ 3x + 4y = 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases} \rightarrow C(40,20) \rightarrow B_C = 12 \cdot 40 + 15 \cdot 20 = 780\text{€}$$

$$D \begin{cases} y = 10 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow D(44,10) \rightarrow B_D = 12 \cdot 44 + 15 \cdot 10 = 678\text{€}$$

Tarea 1.2.C y Tarea 1.2.D

Para obtener los máximos Beneficios se deben elaborar 40 tartas de almendras y 20 tartas de queso, siendo el beneficio de 780€.

Apartado 2 [4 PUNTOS] Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1 PUNTO]. Determine el dominio de la función y calcule todas sus asíntotas (verticales, horizontales u oblicuas), indicando las ecuaciones correspondientes.

Tarea 2.1B [2 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de (x) e identifique las coordenadas de los extremos relativos (máximos y mínimos), si existen.

Tarea 2.1C [1 PUNTO]. Calcule los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes coordenados y realice un esbozo de la gráfica con la información obtenida (puntos de corte, extremos y asíntotas).

TAREA 2.1A Calculamos el dominio de la función:

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Calculamos las asíntotas:

Asíntota Vertical

- Para $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \frac{36}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0} \right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \frac{+}{0^+} = +\infty \rightarrow$$

Tenemos una **Asíntota Vertical en $x = 2$**

Como el grado del numerador es igual que el grado del denominador, tendremos una asíntota horizontal.

Asíntota Horizontal

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 12x}{(x-2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4} = 3 \end{cases}$$

Tenemos una **Asíntota Horizontal en $y = 3$**

TAREA 2.1B Calculamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{3x^2+12x}{(x-2)^2}$

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(6x+12) \cdot (x-2)^2 - 2 \cdot (x-2) \cdot (1) \cdot (3x^2+12x)}{(x-2)^4} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot [(6x+12) \cdot (x-2) - 2 \cdot (3x^2+12x)]}{(x-2)^4} = \frac{6x^2+12x-12x-24-6x^2-24x}{(x-2)^3} = \frac{-24x-24}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{-24x-24}{(x-2)^3} = 0 \rightarrow -24x - 24 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Posible Máximo o Mínimo}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f'(x)$	-	+	-
Comportamiento de $f(x)$	↘	↗	↘

- Crecimiento: $(-1, 2)$
- Decrecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
- Mínimo en $x=-1$: $(-1, -1)$
- Máximo: No hay, ya que en $x=2$ la función no está definida. $D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

TAREA 2.1.C Puntos de corte con los ejes y esbozo de la gráfica.

Cortes con los ejes

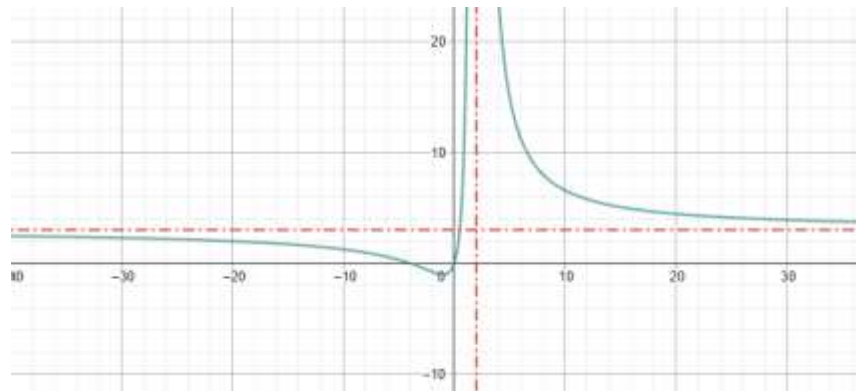
- Corte con el eje OX: $f(x)=0$

$$f(x) = \frac{3x^2+12x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \text{El punto de corte será el } (0,0) \\ x = -4 & \rightarrow \text{El punto de corte será el } (-4,0) \end{cases}$$

- Corte con el eje OY :

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0}{(0-2)^2} = 0 \rightarrow \text{El punto de corte será el } (0,0)$$

Esbozo de la gráfica



Apartado 3 Opción 1 [3 PUNTOS]

El consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica sigue una distribución normal con una desviación típica de 3 GB. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 clientes y se observa que su consumo medio es de 15 GB. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1.A [1,5 PUNTOS] Calcule un intervalo de confianza al 97% para la media del consumo de datos de todos los clientes de la compañía.

Tarea 3.2.B [1,5 PUNTOS] ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media con un error menor de 0,5 GB y un nivel de confianza del 95%?

Tarea 3.1.A Sea X la variable aleatoria que mide el consumo mensual de datos móviles de los clientes de una compañía telefónica, donde $X \sim N(\mu, 3)$.

Tenemos una muestra aleatoria:

$$n = 64 \text{ clientes}$$

$$\bar{x} = 15 \text{ GB}$$

$$\sigma = 3 \text{ GB}$$

Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = $1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \rightarrow \text{por lo tanto } Z_{\alpha/2} = Z_{0,015} = 2,17$$

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por $IC = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n , el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,97}(\mu) = \left(15 - 2,17 \frac{3}{\sqrt{64}}; 15 + 2,17 \frac{3}{\sqrt{64}} \right) = (14,186; 15,814)$$

Tarea 3.1.B Para una confianza del 95%, Nivel de confianza = $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \text{por lo tanto } Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{1,96 \cdot 3}{0,5} \right)^2 \rightarrow n > 138,2976$$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **139 clientes**

Apartado 3 Opción 2 [3 PUNTOS]

En un congreso médico, el 60% de los asistentes son cardiólogos, el 30% son neurólogos y el 10% restante son pediatras. Se sabe que hablan inglés el 80% de los cardiólogos, el 60% de los neurólogos y el 50% de los pediatras. Se elige un asistente al azar. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2.A [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que el asistente seleccionado hable inglés?

Tarea 3.2.B [1 PUNTO] Si se elige un asistente y resulta que no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea neurólogo?

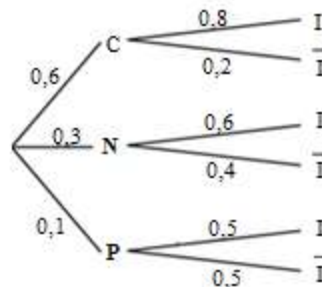
Tarea 3.2.C [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el asistente seleccionado sea cardiólogo y no hable inglés.

Se designan por:

C = “Cardiólogos “ N = “ Neurólogos “ P = “Pediatras “

I = “Hablan Inglés” $\bar{I}$ = “No hablan Inglés”

Diagrama de árbol



Tarea 3.2.A Se trata de una Probabilidad Total:

$P(I) = P(C) \cdot P(I/C) + P(N) \cdot P(I/N) + P(P) \cdot P(I/P) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,71 \rightarrow$ Si nos preguntasen el porcentaje sería del 71%

$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0,71 = 0,29$

Tarea 3.2.B Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes $\rightarrow P(N/\bar{I}) = \frac{P(N \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,29} = 0,4138 \rightarrow$ Si nos preguntasen el porcentaje sería del 41,38%

Tarea 3.2.C Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(C \cap \bar{I}) = P(C) \cdot P(\bar{I}/C) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \rightarrow$ Si nos preguntasen el porcentaje sería del 12%